МОЛДАҒАЛИ ЕРКЕБҰЛАН ӨМІРҒАЛИҰЛЫ

«УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ И РЕГУЛЯРНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе 8D05401 – Математика

Общая характеристика работы. Диссертация посвящена вопросам условий разрешимости дифференциальных уравнений четвёртого порядка, заданных в неограниченной области, и максимальной регулярности их решений.

Актуальность темы. Из работ Ерофеева В.И., Кажаева В.В., Семериковой Н.П., Островского Л.А., Потапова И.А. и других авторов известно, что различные практические задачи приводят к решению дифференциальных уравнений четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Простое бигармоническое уравнение с малыми членами играет важную роль в теории упругости, механике упругих пластин и при изучении медленного течения вязкой жидкости. Однако оно представляет собой весьма частный случай дифференциальных уравнений четвёртого порядка. Вопросы существования и единственности решений краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с регулярными коэффициентами широко исследованы в литературе. Однако некоторые задачи стохастического анализа, теории колебаний, биологии и финансовой математики приводят к дифференциальным уравнениям с неограниченными интервалами и промежуточными коэффициентами. Условия разрешимости таких уравнений и качественные свойства решения зависят главным образом от изменения коэффициентов в окрестности бесконечно удалённых точек и их взаимосвязи друг с другом. Сингулярное дифференциальное уравнение четвёртого порядка иногда используется в качестве регуляризатора при исследовании уравнений низших порядков, таких как уравнения Кортевега-де-Фриза или уравнения реакции-диффузии.

В первых трёх разделах работы рассматриваются двучленные уравнения вида

$$y^{(4)} + p_j(x)y^{(j)} = F(x), \;\; j = 1,2,3, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Уравнение вида (1) с малым коэффициентом, равным нулю, заданное на некомпактном интервале, называется вырожденным дифференциальным уравнением. Вырожденное эллиптическое уравнение второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} = f(x)$$

известно как стационарное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова. Оно изучалось как модель броуновского движения частиц в 1920-х годах. Здесь a_{ij} – ковариационная матрица, b_i – коэффициент смещения.

В дальнейшем мы предполагаем, что $p_j(x)$ $(j = 1,2,3)$ — j раз непрерывно дифференцируемая, положительная функция. Известно, что оператор $L_0 y = y^{(4)} + p_j(x) y^{(j)}$, определенный на множестве четырежды непрерывно дифференцируемых и финитных функций $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$, замкнут в норме $L_2(\mathbb{R})$. Обозначим это замыкание оператора L_0 через L. Элемент $y \in D(L)$, удовлетворяющий равенству $Ly = F$, называется решением уравнения (1).

Достаточно хорошо изученная форма дифференциальных уравнений четвертого порядка на неограниченном интервале имеет вид:

$$y^{(4)} + q(x) y = f(x), f \in L_2(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Слабые условия однозначной разрешимости уравнения (2) при выполнении неравенств $q \geq \delta > 0$ были получены в работах таких авторов как Исмагилов Р. С., Отелбаев М., Boimatov K.Kh., Ewerritt W.N., Giertz M. При этом в работе Отелбаева М. было показано, что при выполнении некоторых условий на колебание функции q для решения выполняется неравенство

$$\left\| y^{(4)} \right\|_2 + \| q y \|_2 \leq C \| f \|_2.$$

При выполнении последнего неравенства решение y уравнения (2) называется максимально регулярным. В случае, когда $q \geq \delta > 0$, а промежуточные коэффициенты p, r и s — финитные функции, эти результаты, полученные для уравнения (2), справедливы и для дифференциального уравнения общего вида:

$$y^{(4)} + p(x) y''' + r(x) y'' + s(x) y' + q(x) y = g(x). \tag{3}$$

Это доказывается с помощью известных теорем о малых возмущениях.

Однако многие практические задачи в области физических процессов в турбулентной среде, биологических популяций, финансовой математики и стохастического анализа и т. д. приводят к дифференциальным уравнениям вида (3), в которых промежуточные коэффициенты $p,\ r$ и s не ограничены, а малый коэффициент q равен нулю или не сохраняет знак, включая конкретное дифференциальное уравнение (1). Если p_j — неограниченная функция, то методы указанных выше авторов, а также других известных работ, непригодны для получения условий разрешимости уравнения (1) и максимальной регулярности его решения. Это связано с тем, что оператор $p_j \frac{d^j}{dx^j} (j = 1,2,3)$, соответствующий промежуточному члену (1), не подчиняется дифференциальному оператору четвертого порядка $\frac{d^4}{dx^4} + E$ (E - единичный оператор). Когда p_j — функция общего вида, это открытая проблема. Поэтому тема данной диссертационной работы, посвящённая проблемам разрешимости и максимальной регулярности для дифференциальных уравнений четвёртого порядка (1) и некоторых других вырожденных дифференциальных уравнений, несомненно, актуальна как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

Цель работы. Получить условия однозначной разрешимости двучленных вырожденных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с неограниченными коэффициентами, заданных на числовой прямой, показать качественные свойства их решений и доказать оценки максимальной регулярности решений.

Объект исследования. Условия разрешимости дифференциальных уравнений четвёртого порядка с промежуточными членами, оценки максимальной регулярности их решений.

Методы исследования. Методы локальных и априорных оценок, некоторые факты теории замкнутых операторов, применение неравенств типа Харди, идентификация сопряженных операторов и методы спектральной теории. Природа дифференциальных уравнений, заданных формулой (1) для значений $j = 1, 2, 3$, различна. Для их изучения используются различные методы.

Научная новизна. В работе исследованы вопросы разрешимости и регулярности двучленных вырожденных дифференциальных уравнений четвёртого порядка в гильбертовом пространстве, промежуточные коэффициенты которых могут неограниченно расти, и получены следующие новые результаты:

- доказано, что представленные задачи сводятся к задаче разрешимости двучленных дифференциальных уравнений, не являющихся вырожденными и сохраняющих знак потенциала, которые широко изучались ранее.

- получены достаточные условия к p_j для существования и единственности решения дифференциального уравнения (1) в каждом из случаев $j = 2, 3$.

- в случае $j = 1$ доказано, что уравнение (1) имеет решение и оно единственно при наложении дополнительного условия на колебание коэффициента p_j.

- показано, что оценка максимальной регулярности решения уравнения (1) выполняется в каждом из трёх случаев $j = 1,2,3$ при наложении дополнительного условия на колебание коэффициента p_j.

- получены условия корректности некоторых дифференциальных уравнений четвёртого порядка, заданных в дивергентной форме с неограниченными старшими и промежуточными коэффициентами.

- Приведены достаточные условия компактности резольвент минимальных дифференциальных операторов, образующих двучленные вырожденные дифференциальные уравнения четвёртого порядка.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты носят теоретический характер. В совокупности они расширяют теорию разрешимости и регулярности вырожденных дифференциальных уравнений четвёртого порядка. Они могут быть использованы для оценки качества методов аппроксимации решений уравнений четвёртого порядка общего вида. Они также могут быть использованы для решения практических задач, приводимых к вырожденным дифференциальным уравнениям четвёртого порядка.

Связь работы с другими научно-исследовательскими работами. Диссертационная работа выполнена в рамках проекта, финансируемого из государственного бюджета:

AP14870261 «Качественные свойства решений сингулярных несильно эллиптических систем второго порядка».

AP23488049 «Нелинейные дифференциальные уравнения со смещением».

Тема диссертационного исследования по направлению «Естественные науки» соответствует приоритетному направлению «Интеллектуальный потенциал страны», специализированному научному направлению фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии.

Апробация полученных результатов. Результаты работы представлены на международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложений» (Ташкент, 2023), «Традиционной международной научной конференции, посвященной Дню ученых (Алматы, 2024)», «Современные проблемы математики, механики и их приложений (MPMMA)» (Баку, 2024), 14-й Международной научной конференции Союза математиков Грузии (Батуми, 2024), Международной научной конференции «Математика и математическое образование (ICMME)» (Невшехир, Турция, 2024), Международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2024), Международной научной конференции «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (EMJ-2025)» (Астана, 2025), «Традиционной международной апрельской математической конференции, посвященной Дню науки Республики Казахстан (Алматы, 2025)», XX Международной научной конференции «Ломоносов – 2025» (Астана, 2025).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 13 научных статьях и трудах конференций, в том числе в 1 статье в издании по математике, входящем в базу данных Scopus с процентилем CiteScore не менее 25, 4 статьях в изданиях, рекомендованных уполномоченным органом, 5 статьях в зарубежных изданиях.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх разделов (каждый раздел делится на подразделы), заключения и списка литературы.

Количество использованных источников – 64.

Ключевые слова. Дифференциальное уравнение четвёртого порядка, неограниченные переменные коэффициенты, максимальная регулярность, коэрцитивная оценка, компактная резольвента, однозначная разрешимость.